הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 1מ2 — 104042

מבחן סוף סמסטר מועד א', חורף - 14.02.25

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 5 שאלות בחירה מרובה. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתונה $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. אזי

(א) קיים $b > 0$ עבורו $f(x)$ פונקציה עולה ממש בקטע $(0, b)$

(ב) הפונקציה רציפה בכל נקודה

(ג) f גזירה בקטע $[0, 1]$

(ד) $\boxed{f'_-(0) \text{ קיים}}$

2. נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I = \int_1^\infty (\pi - 2\arctan x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$II = \int_0^1 \frac{1}{\ln(1+x)}dx$$

(א) שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים

(ב) $\boxed{I \text{ מתכנס ו-} II \text{ אינו מתכנס}}$

(ג) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ד) שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים

3. נתונים הטורים

$$I = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\left(\tan\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

$$II = \sum_{n=1}^\infty \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^4}$$

(א) $\boxed{\text{שני הטורים מתכנסים}}$

(ב) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ג) שני הטורים אינם מתכנסים

(ד) I מתכנס ו-II אינו מתכנס

4. נתונה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ קיימים ושווים לכל x_0 אז f רציפה בכל נקודה

(ב) אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ וגם $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ אז $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על

(ג) אם f איזוגית אז היא רציפה ב- $x = 0$

(ד) אם f רציפה בכל נקודה, וגם גזירה בכל נקודה פרט לנקודה $x = 0$, וגם $f'(x) > 0$ לכל $x \neq 0$, אז f עולה ממש***

5. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) $\boxed{\text{אם } a_n \le b_n \le a_{n+1} \text{ לכל אינדקס } n \text{ אז: } a_n \text{ מתכנסת} \iff b_n \text{ מתכנסת}}$

(ב) אם $a_n + b_n, a_n \cdot b_n$ סדרות מתכנסות, אז a_n, b_n שתיהן מתכנסות

(ג) אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית עבורה $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל אינדקס n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ד) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים וחיובי ו- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ אינו קיים, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ אינו קיים

חלק ב'

יש לרשום <u>בעמודים הבאים</u> פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

6. (30 נקודות) בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx$$

פתרון:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)}dx =$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$= \int -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-3}dx = -\frac{3}{2}\cdot\ln|x-1| + \frac{7}{2}\cdot\ln|x-3| + C$$

(ב) (10 נקודות)

מיצאו מספר רציונלי שהמרחק שלו מ- $\sqrt{20}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{200}$.

פתרון: נסתכל על $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. נסתכל על פולינום טיילור של $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ בסביבת הנקודה 16. אז $a = 16,\ x = 20$ ולכן, לפי נוסחת השארית של לגרנג', לכל n יש $16 < c < 20$ עבורו

$$R_n(20) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(20-16)^{n+1} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot 4^{n+1}.$$

כיוון ש- $16 < c < 20$ אז $4 \le c^{\frac{1}{2}} \le (20)^{\frac{1}{2}}$ ולכן $0 < \frac{1}{(20)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{4}$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad f(16) = 4 \quad T_0(x) = 4$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, \quad f'(16) = \frac{1}{8} \quad T_1(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16)$$
$$|R_0(20)| = \left|\frac{\frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}}{1!}4^1\right| \underset{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{4}}{\le} \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}, \quad f''(16) = -\frac{1}{256} \quad T_2(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$$
$$|R_1(20)| = \left|\frac{-\frac{1}{4c^{\frac{3}{2}}}}{2!}4^2\right| \underset{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{4}}{\le} \frac{1}{32}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$$
$$|R_2(20)| = \left|\frac{\frac{3}{8c^{\frac{5}{2}}}}{3!}4^3\right| \underset{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{4}}{\le} \frac{3}{6 \cdot 8 \cdot 4^2} = \frac{1}{256} \le \frac{1}{200}$$

ולכן $T_2(20)$ הוא מספר שמרחקו מ- $\sqrt{20}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{200}$.

$$T_2(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$$
$$T_2(20) = 4 + \frac{1}{8}(20-16) - \frac{1}{512}(20-16)^2 = 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{32}$$

(ג) (10 נקודות) הוכיחו כי $f(x)=x^5+x^{\frac{1}{3}}+1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא חח"ע ועל, והוכיחו כי f^{-1} גזירה בנקודה $y=3$ ומיצאו את $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

פתרון: $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה שזה $\mathbb{R}$.
נראה כי היא על:

$$\lim_{x\to\infty} x^5+x^{\frac{1}{3}}+1=\lim_{x\to\infty} x^5\left(1+\frac{1}{x^{\frac{14}{3}}}+\frac{1}{x^5}\right)=\infty\cdot 1=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^5+x^{\frac{1}{3}}+1=\lim_{x\to-\infty} x^5\left(1+\frac{1}{x^{\frac{14}{3}}}+\frac{1}{x^5}\right)=-\infty\cdot 1=-\infty.$$

יהי $y\in\mathbb{R}$. כיוון ש- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+x^{\frac{1}{3}}+1=-\infty$ אז קיים $x_1<0$ עבורו אם $x<x_1$ אז $f(x)<y$.
כיוון ש- $\lim\limits_{x\to\infty} x^5+x^{\frac{1}{3}}+1=\infty$ אז קיים $x_2>0$ עבורו אם $x>x_2$ אז $f(x)>y$.
לכן $f(x_1-1)<y<f(x_2+1)$ וגם, כיוון ש- f רציפה בכל נקודה אז רציפה בקטע $[x_1-1,x_2+1]$.
לכן לפי משפט ערך הביניים קיים $x_1-1<c<x_2+1$ עבורו $f(c)=y$.
לכן f על.
f גזירה לכל $x\neq 0$ ושם $f'(x)=5x^4+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}>0$.
כיוון ש- f רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$ וגם $f'(x)>0$ ב- $(0,\infty)$ אז לפי מסקנות לגרנג' f עולה ממש בקטע $[0,\infty)$.
כיוון ש- f רציפה ב- $(-\infty,0]$ וגזירה ב- $(-\infty,0)$ וגם $f'(x)>0$ ב- $(-\infty,0)$ אז לפי מסקנות לגרנג' f עולה ממש בקטע $(-\infty,0]$.
לכן f עולה ממש בקטע $(-\infty,\infty)$ ולכן חח"ע.
כיוון ש- $f(1)=1^5+1^{\frac{1}{3}}+1=3$ וכיוון ש- $f'(1)=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\neq 0$ וכיוון ש- f רציפה והפיכה, אז לפי נגזרת של פונקציה הופכית

$$\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{16}.$$

7. (30 נקודות)

בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי אם $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירות, וגם $f(a) = g(a),\ f(b) = g(b)$ וגם $f'(x) \le g'(x)$ לכל $a < x < b$, אז $f(x) = g(x)$ לכל $a \le x \le b$.

פתרון: נסתכל על $h(x) = g(x) - f(x)$.
אז h גזירה בקטע $[a,b]$ כהפרש של גזירות בקטע $[a,b]$ ובנוסף $h'(x) = g'(x) - f'(x) \ge 0$ לכל $a \le x \le b$.
לכן, לפי מסקנות לגרנג', h עולה בקטע $[a,b]$.
בנוסף $h(a) = g(a) - f(a) = 0 = g(b) - f(b) = h(b)$.
כיוון ש- h עולה בקטע $[a,b]$ אז לכל $a \le x \le b$ מתקיים כי $0 = h(a) \le h(x) \le h(b) = 0$ ולכן $h(x) = 0$ לכל $a \le x \le b$ שנותן כי $f(x) = g(x)$ לכל $a \le x \le b$.

(ב) (10 נקודות) חשבו את הגבול של הסדרה

$$a_n = \frac{1-2+\cdots+(-1)^{n+1}n}{n^2\ln n}, \quad n \geq 2$$

פתרון: לכל $n \geq 2$ מתקיים כי

$$-\frac{n(n+1)}{2n^2\ln n} = \frac{-1-2-\cdots-n}{n^2\ln n} \leq \underbrace{\frac{1-2+\cdots+(-1)^{n+1}n}{n^2\ln n}}_{a_n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2\ln n} = \frac{n(n+1)}{2n^2\ln n}$$

וכיוון ש-

$$\pm\frac{n(n+1)}{2n^2\ln n} = \pm\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

אז לפי משפט הסנדביץ נובע כי

$$a_n = \frac{1-2+\cdots+(-1)^{n+1}n}{n^2\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(ג) (10 נקודות) חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים במובן הרחב, או הסבירו מדוע אינו קיים במובן הרחב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt}{\sin^2 x}.$$

פתרון: $\frac{t}{\cos t}$ רציפה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ כיוון שהיא פונקציה אלמנטרית שמוגדרת בקטע זה, וכיוון ש-

$$x, x^2 : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

רציפות וגזירות, אז לפי מסקנה מהמשפט היסודי $\int\limits_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt$ גזירה (ולכן גם רציפה) בקטע $(-1,1)$ ומתקיים

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt=\int\limits_{0}^{0^2}\frac{t}{\cos t}dt=0$$

וגם

$$\left(\int\limits_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt\right)'=\frac{x^2}{\cos x^2}\cdot 2x-\frac{x}{\cos x}\cdot 1=\frac{2x^3}{\cos x^2}-\frac{x}{\cos x}$$

ולכן, לפי כלל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt}{\sin^2 x}\overset{(L)}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{\cos x^2}-\frac{x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos x^2\cdot\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}-\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=-\frac{1}{2}$$

כאשר השתמשנו בגבול המיוחד

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

ובזה שהפונקציות $\frac{x^2}{\cos x^2\cdot\cos x},\frac{1}{2\cos^2 x}$ אלמנטריות ומוגדרות בסביבה של 0 ולכן לפי משפט רציפות ב-0.